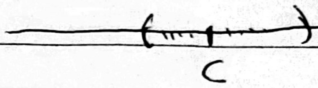
Όρια συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένα σημείο $c \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A εάν $\forall \delta > 0$, $\exists\, x \in A$ με $x \neq c$ τ.ω. $|x-c| < \delta$

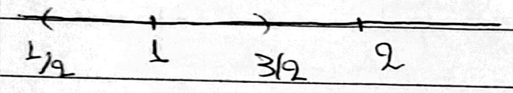
Διαισθητικά: Το c είναι σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}$ εάν κάθε δ-γειτονιά του c της μορφής $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διάφορο του c κέντρο διαστήματος, δ ακτίνα



π.χ. $A = \{1, 2\}$

Το σημείο 1 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A αφού η $\frac{1}{2}$-γειτονιά του 1 δεν περιέχει κάποιο στοιχείο του A διάφορο του 1

$V_{1/2}(1)$



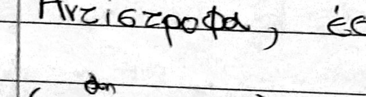
Θεώρημα: Το $c \in \mathbb{R}$ είναι σ.σ. του $A \subseteq \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\exists$ ακολουθία $(a_n) \in A$ τέτοια ώστε $a_n \to c$ και $a_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη

Εάν c είναι σ.σ. του A, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ n-γειτονιά $V_{1/n}(c) = (c - 1/n, c + 1/n)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο a_n του A με $a_n \neq c$

$\rightsquigarrow$ $|a_n - c| < \frac{1}{n}$ $a_n \in A$ $a_n \neq c$ $\forall n$ $\rightsquigarrow$ $a_n \to c$, $a_n \in A$, $a_n \neq c$

Αντίστροφα, έστω ότι $\exists$ ακολουθία $a_n \to c$, $a_n \in A$, $a_n \neq c$



Τότε $\forall \delta > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_n - c| < \delta$ $\forall n \geq n_0$ $\rightsquigarrow$ $a_n \in V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$

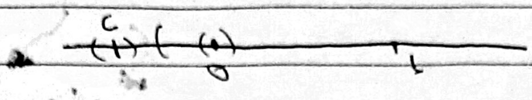
$a_n \in A$, $a_n \neq c$

$\rightsquigarrow$ a_n σ.σ. του A

Παράδειγμα Για το σπίτι: (a) $A=(0,1)$. Τότε κάθε σημείο του $[0,1]$ είναι σ.σ. του A

Παράδειγμα

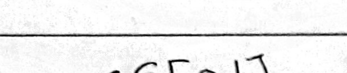
(b) Τα σύνολα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων δεν έχουν σ.σ.



(c) Το $\mathbb{N}$ δεν έχει σ.σ.

Παράδειγμα

$I=[0,1]$, τότε το σύνολο $A=\mathbb{Q}\cap I$ αποτελείται από όλους τους ρητούς αριθμούς στο $[0,1]$. Τότε κάθε σημείο του I είναι σ.σ. του A



Ανάμεσα από δύο αριθμούς αυστηρά υπάρχει ένας ρητός

Έστω $c\in[0,1]$

Θεωρώ μια δ-γειτονιά αφού ανάμεσα από 2 αριθμούς $\exists$ τουλάχιστον ένας ρητός. Έπεται ότι στη δ-γειτονιά θα $\exists$ τουλάχιστον ένας ρητός $\cap[0,1]$

Ορισμός του ορίου

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και έστω c σ.σ. του A. Για τη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι ο $L\in\mathbb{R}$ είναι το όριο της f στο c εάν $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ τέτοιο ώστε εάν $0<|x-c|<\delta$ τότε $|f(x)-L|<\varepsilon$

Γράφουμε $L=\lim_{x\to c} f(x)$ ή $f(x)\to L$ καθώς $x\to c$

* Το δ εξαρτάται από το ε
* Πρέπει το c να είναι σ.σ. του πεδίου ορισμού της f.

Εαν το όριο της f στο c υπάρχει και ισούται με L λέμε ότι η f συγκλίνει στο L στο c.

Αν Δεν υπάρχει λέμε ότι αποκλίνει

<u>Θεώρημα</u>: Εαν $f: A \to \mathbb{R}$ και c σ.σ. του A, τότε η f μπορεί να έχει το πολύ ένα όριο στο c

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $L, L' \in \mathbb{R}$ με $L = L'$ τέτοιο ώστε $\lim_{x \to c} f(x) = L$ και $\lim_{x \to c} f(x) = L'$

Έστω $\epsilon > 0$

- $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. εαν $x \in A$ και $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon/2$
- $\exists\, \delta' > 0$ τ.ω. εαν $x \in A$ και $0 < |x-c| < \delta' \Rightarrow |f(x)-L'| < \epsilon/2$

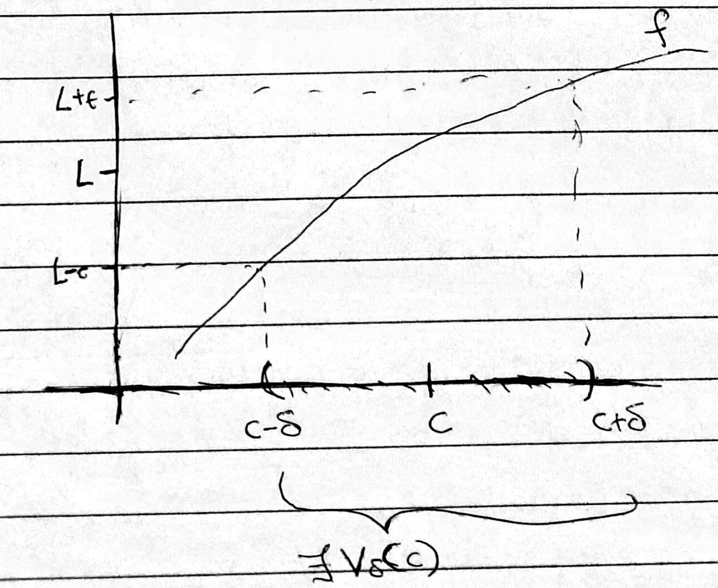
Θέτω $d = \min\{\delta, \delta'\}$

Τότε εαν $x \in A$ με $0 < |x-c| < d$, έχω

$$|L - L'| \leq |f(x) - L| + |f(x) - L'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Αφού $\epsilon > 0$ τυχαίο $\Rightarrow L = L'$

Δεδομένου της γειτονιάς $V_\epsilon(L)$



$V_\delta(c) \subseteq V_\epsilon(L)$

No. Date

Παραδείγματα

(α) $\lim_{x\to c} b = b$ Θέτω $f(x)=b$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω $\epsilon>0$. Διαλέγω $\delta = 1$

Τότε εάν $0<|x-c|<\delta=1 \rightsquigarrow$ έχω $|f(x)-b|=|b-b|=0<\epsilon$

(β) $\lim_{x\to c} x = c$ Θέτω $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω $\epsilon>0$. Διαλέγω $\delta=\epsilon$

Τότε, εάν $0<|x-c|<\delta \rightsquigarrow |g(x)-c| = |x-c| <\delta=\epsilon$

(γ) $\lim_{x\to c} x^2 = c^2$ Θέτω $h(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$

$|h(x)-c^2| = |x^2-c^2| = |x+c||x-c| \leq \underbrace{(|x|+|c|)}_{2|c|}|x-c|$

Εάν $|x-c|<1 \rightsquigarrow |x|<|c|+1 \rightsquigarrow |h(x)-c^2| < (2|c|+1)|x-c|$ (1)

Έστω $\epsilon>0$ Διαλέγω $\delta=\min\left\{\frac{\epsilon}{2|c|+1}, 1\right\}$

(1) Εάν $0<|x-c|<\delta$

$|h(x)-c^2| < (2|c|+1)\delta \leq (2|c|+1)\frac{\epsilon}{2|c|+1} = \epsilon$

(δ) $\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ εάν $c>0$

Θέτω $\phi(x) = \frac{1}{x}$ με $x>0$

$\left|\phi(x)-\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{x-c}{xc}\right| = \frac{1}{|x||c|}|x-c|$

Εάν $|x-c|<\frac{c}{2} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{c}{2}, \frac{3c}{2}\right)$

Τότε $\left|\phi(x)-\frac{1}{c}\right| < \frac{2}{c^2}|x-c|$ (1)

Έστω $\epsilon>0$ Διαλέγω $\delta=\min\{c/2, c^2\epsilon/2\}$

Εάν $0<|x-c|<\delta$, τότε από την (1) έχω

$\left|\phi(x)-\frac{1}{c}\right| < \frac{2}{c^2}\delta \leq \frac{2}{c^2}\frac{c^2}{2}\epsilon = \epsilon$

Ασκήσεις Για σπίτι

① $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$

② $\lim_{x \to c} x^3 = c^3$

③ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = 1/2$

Υπόδειξη για ③: $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$ Έστω $\phi(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ $\left|\phi(x) - \frac{4}{5}\right| = \frac{|5x^3 - 4x^2 - 24|}{5(x^2+1)}$

$= \frac{|5x^2 + 6x + 12| \, |x - 2|}{5(x^2 + 1)}$

Εάν $1 < x < 3$ $\quad 5x^2 + 6x + 2 < 7 \cdot 5$

$5(x^2 + 1) > 5(1 + 1)$